ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ SINH BỞI CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ ÁP DỤNG

HẠ THỊ NGÂN

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

THÁI NGUYÊN 2016

Mục lục

Mở đầu

Các bài toán về dãy số sinh bởi hàm số lượng giác là một trong những nội dung quan trọng của giải tích. Rất nhiều dạng toán khác cũng quy về việc ước lượng, tính tổng, xét tính tuần hoàn, tìm số hạng tổng quát và giới hạn của dãy số sinh bởi hàm lượng giác.

Những bài toán về dãy số là một trong những dạng toán thường gặp trong các kỳ thi Olympic toán quốc gia và quốc tế, Olympic toán sinh viên các trường đại học, cao đẳng.

Việc giải các bài toán dạng này đòi hỏi học sinh phải nắm vững các kiến thức cơ bản về các lớp hàm này đồng thời nắm được các kiến thức liên quan và phải biết vận dụng một cách sáng tạo, logic và hợp lý.

Chính vì những lý do trên mà tôi chọn đề tài "Một số tính chất của dãy số sinh bởi các hàm lượng giác và áp dụng" nhằm hệ thống một số áp dụng của lớp hàm này. Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo luận văn gồm ba chương

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, trình bày về các tính chất cơ bản của hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược và hàm hyperbolic đồng thời trình bày về một số dạng đẳng thức, các định lý cơ bản của đại số và giải tích liên quan.

Chương 2. Trình bày các dạng toán về xác định dãy số, ước lượng dãy số và các tính chất của dãy số sinh bởi hàm lượng giác.

Chương 3. Trình bày các dạng toán về tính giới hạn, tính tổng và tích của dãy số sinh bởi hàm lượng giác, một số dạng toán liên quan đến hàm

lượng giác ngược và hàm hyperbolic.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tác giả nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Đào Thị Liên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô - Người đã luôn sát cánh bên tác giả từ những ngày đầu tiên thực hiện luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn những gợi ý quý báu của GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu thực hiện đề tài.

Qua đây, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa hoc - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy đã giúp đỡ tác giả trong thời gian theo học các chuyên đề và hoàn thành các công việc của một học viên cao học.

Thái nguyên, ngày 30 tháng 05 năm 2016

Tác giả

Hạ Thị Ngân

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số định nghĩa và tính chất của hàm số lượng giác

Trong mục này ta xét hàm số $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với tập xác định $D \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên $M \subset D$ nếu $\forall x \in M$ thì $-x \in M$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên $M \subset D$ nếu $\forall x \in M$ thì $-x \in M$ và $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ 1.1. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn; các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số lẻ trên tập xác định của chúng.

Định nghĩa 1.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn cộng tính trên $M \subset D$ nếu $\forall x \in M$ thì $x \pm a \in M$, $f(x + a) = f(x), \forall x \in M$. Số nguyên dương a bé nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn cộng tính $f(x)$.

Ví dụ 1.2. Hàm số $y = \cos x$, hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$; hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

1.2 Một số tính chất của đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.3. Hàm số có dạng

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

trong đó a_n, b_n không đồng thời bằng 0 (tức là ${a_n}^2 + {b_n}^2 > 0$), $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ với i = 0, 1, ..., n, j = 1, ..., n, được gọi là đa thức lượng giác bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Khi tất cả các $b_j = 0$ với j = 1, 2, ..., n ta có

Định nghĩa 1.4. Hàm số có dạng $C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx$ ($a_n \neq 0$) được gọi là đa thức lượng giác bậc n theo cosin.

Tương tự, khi tất cả các $a_i = 0$ với i = 0, 1, ..., n ta có

Định nghĩa 1.5. Hàm số có dạng $S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx$ ($b_n \neq 0$) được gọi là đa thức lượng giác bậc n theo sin.

Tính chất 1.1. Tổng của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc không vượt quá $\max\{m, n\}$.

Tính chất 1.2. Tích của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc bằng n + m.

Tính chất 1.3. Nếu đa thức lượng giác

$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ đồng nhất bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì tất cả các hệ số của nó đều bằng 0, tức là $a_0 = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_n = b_n = 0$.

1.3 Một số dạng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm lượng giác và lượng giác ngược

Từ các hàm lượng giác cơ bản như $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$, $y = \cot x$ ta có các hàm lượng giác ngược tương ứng trong các khoảng đồng biến hoặc nghịch biến của chúng.

Trong $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, (hay trong $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \sin x$ (hay $y = \tan x$) là hàm đồng biến, liên tục nên khi đó tồn tại hàm ngược $y = \arcsin x$ (hay $y = \arctan x$)) như sau:

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x = \sin y \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\arcsin x) \equiv x \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x = \tan y \\ -\infty \leq x \leq \infty \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\arctan x) \equiv x \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

Trong $[0, \pi]$, (hay trong $(0, \pi)$ hàm số $y = \cos x$ (hay $y = \cot x$) là hàm nghịch biến, liên tục nên khi đó tồn tại hàm ngược $y = \arccos x$ (hay $y = \text{arccot } x$)) như sau:

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x = \cos y \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\arccos x) \equiv x \\ 0 \leq \arccos x \leq \pi \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{arccot } x \\ x = \cot y \\ -\infty \leq x \leq \infty \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot(\text{arccot } x) \equiv x \\ 0 \leq \text{arccot } x \leq \pi \\ -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,

2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,

3) $\arctan(-x) = -\arctan x$,

4) $\text{arccot } (-x) = -\text{arccot } x$,

5) Hàm $f(x) = \arcsin x$ có tính chất
$f(x) + f(y) = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \ \forall x, y \in [-1, 1]$,

6) Hàm $g(x) = \arccos x$ có tính chất
$g(x) + g(y) = f\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \ \forall x, y \in [-1, 1]$,

7) Hàm $h(x) = \arctan x$ có tính chất
$h(x) + h(y) = h\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$,

8) Hàm $p(x) = \text{arccot } x$ có tính chất
$p(x) + p(y) = p\left(\dfrac{xy-1}{x+y}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq -y$.

1.4 Định nghĩa và một số dạng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic

1.4.1 Định nghĩa

Cho $x \in \mathbb{R}$. Kí hiệu

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ và gọi } \cosh x \text{ là hàm cosin hyperbolic,}\\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ và gọi } \sinh x \text{ là hàm sin hyperbolic,}\\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ và gọi } \tanh x \text{ là hàm tang hyperbolic,}\\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \text{ và gọi } \coth x \text{ là hàm côtang hyperbolic.}
\end{aligned}$$

1.4.2. Một số dạng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic

Các đồng nhất thức cơ bản

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1,\\
1 - \tanh^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x},\\
\coth^2 x - 1 &= \frac{1}{\sinh^2 x}.
\end{aligned}$$

Công thức nhân đôi

$$\begin{aligned}
&\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x,\\
&\cosh 2x = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 - 2\sinh^2 x,\\
&\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x};
\end{aligned}$$

Công thức nhân ba

$$\begin{aligned}
&\sinh 3x = 4\sinh^3 x + 3\sinh x,\\
&\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x,\\
&\tanh 3x = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^3 x}.
\end{aligned}$$